

Iperbole - Esercizio n.158 pag. 495

martedì 27 aprile 2021 15:29

158 Determina l'area del triangolo che la tangente nel punto C(4; 1) all'iperbole di equazione $x^2 - 12y^2 = 4$ forma con gli assi di simmetria dell'iperbole. $\frac{1}{6}$

L'iperbole è una curva simmetrica rispetto all'asse x, rispetto all'asse y e rispetto all'origine.

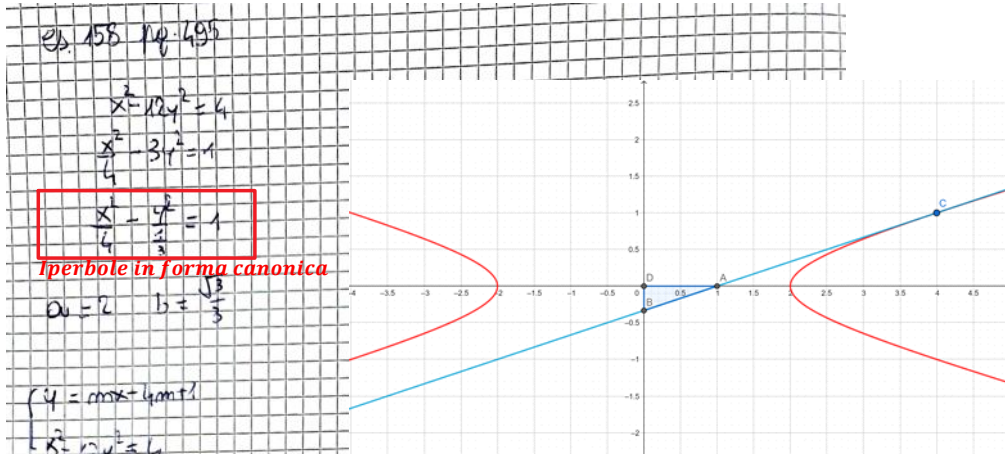
Infatti:

$f(x)=f(-x)$ quindi è pari, simmetria rispetto all'asse y

$f(x)=-f(x)$ quindi è dispari, simmetria rispetto all'origine

$f(y)=f(-y)$ simmetria rispetto all'asse x

Pertanto gli assi di simmetria sono gli assi: $x=0$ e $y=0$



$x^2 - 12(m(x-4) + 1)^2 = 4$
 $x^2 - 12(m^2x^2 + 1 - 8mx + 2mx - 8m) = 4 \Rightarrow$
 $x^2 - 12m^2x^2 + 12m^2 + 1 - 8mx + 24mx - 96m = 4 \Rightarrow$
 $(1 - 12m^2)x^2 + 16mx - 96m + 12m^2 - 3 = 0$
 $\Delta = 0 \Rightarrow 144m^2(6m-1)^2 - (1-12m^2)(-96m+12m^2-3) = 0$
 $144m^2(36m^2 - 12m + 1) + 96m(1-12m^2) - 3(1-12m^2) = 0$
 $5184m^4 - 1728m^3 + 144m^2 + 96m - 36m^2 + 36 = 0$
 $5184m^4 - 1728m^3 + 108m^2 + 96m + 36 = 0$
 $144m^2 - 96m + 16 = 0$
 $9m^2 - 6m + 1 = 0$
 $(3m-1)^2 = 0$
 $m = \frac{1}{3}$

Generica retta per C
 $y - 1 = m(x - 4) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{3}(x - 4)$

$f = y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$
 $f = y = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1, 0)$
 $f = x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \Rightarrow B(0, -\frac{1}{3})$

$A = \frac{1 \cdot |1 - \frac{1}{3}|}{2} = \frac{1}{6}$

Consideriamo il sistema tra l'iperbole e la retta generica passante per C: $y - 1 = m(x - 4)$
 Perché la retta sia tangente basta porre il delta dell'equazione risultante a zero
 $\Delta = 0$ CONDIZIONE DI TANGENZA
 $\frac{\Delta}{4} = 0$ se coeff. di x è pari)

N.B: Il punto C(4;1) appartiene all'iperbole. Sostituendo $x=4$ e $y=1$ nella equazione dell'iperbole $16-12=4$ (identità)

Per trovare l'equazione della tangente in un punto dell'iperbole come in questo caso (e non da 1 punto esterno) avremmo potuto utilizzare la formula dello sdoppiamento, :

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

$A(x_0, y_0)$ punto di tangenza

$$\frac{4x}{4} - \frac{y}{1/3} = 1$$

$$x - 3y = -1 \quad y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \quad (m = \frac{1}{3})$$

N.B. si trova la stessa retta più velocemente!!

A e B sono i punti di intersezione della tangente con gli assi.

L'esercizio richiede di determinare l'area del triangolo ABO:
 $\frac{1}{2} AO * OB = \frac{1}{2} * 1 * \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

SYRTICO MATH

