Iperbole - trova equazione - esercizio n.72

72 Trova per quali valori di k l'equazione $\frac{x^2}{4k^2-1} - \frac{y^2}{k-3} = 1$ rappresenta:

a. un'ellisse;

b. un'iperbole;

c. un'iperbole con i fuochi sull'asse y;

d. un'iperbole con i fuochi sull'asse y che ha distanza focale uguale a 4.

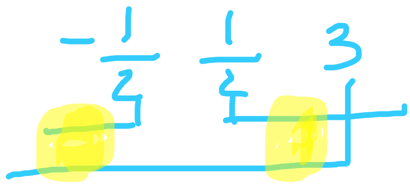
$\left[\text{a) } k < -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} < k < 3;\ \text{b) } -\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2} \vee k > 3;\ \text{c) } -\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2};\ \text{d) } k = 0, k = -\frac{1}{4}\right]$

a) Affinché l'equazione rappresenti una ellisse deve essere del tipo

quindi si deve avere : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\begin{cases} 4k^2 - 1 > 0 \\ k - 3 < 0 \end{cases}$ $\qquad \frac{-y^2}{k-3} = +\frac{y^2}{b^2}$

$\begin{cases} k < -\frac{1}{2} \vee k > \frac{1}{2} \\ k < 3 \end{cases}$ $\qquad \boldsymbol{k < -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} < k < 3}$

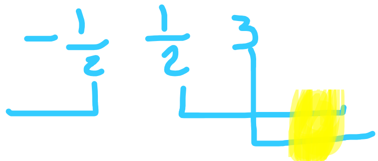


b)

Affinché l'equazione rappresenti un'iperbole deve essere del tipo $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ oppure $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, quindi si deve avere

1 CASO

$\begin{cases} 4k^2 - 1 > 0 \\ k - 3 > 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} k < -\frac{1}{2} \vee k > \frac{1}{2} \\ k > 3 \end{cases}$

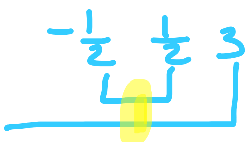


$k > 3$

$K > 3$

2 CASO

$\begin{cases} 4k^2 - 1 < 0 \\ k - 3 < 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} -\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2} \\ k < 3 \end{cases}$



$$\boldsymbol{-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}}$$

c) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

La richiesta coincide con il caso 2 della richiesta b) pertanto :

$$\boldsymbol{-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}}$$

d) iperbole caso c) ma con distanza focale $2c = 4$

2c=4 c=2

$c^2 = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 = 4$

$-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$

$-\frac{x^2}{4k^2-1} - \frac{y^2}{3-k} = -1$

$\frac{x^2}{1-4k^2} - \frac{y^2}{3-k} = -1$

$\boldsymbol{a^2}$ $\boldsymbol{b^2}$

$c^2 = a^2 + b^2 = 1 - 4k^2 + 3 - k = 4$

$-4k^2 - k + 4 = 4$

$4k^2 + k = 0$

$\mathrm{k}(4\mathrm{k}+1) = 0$

$\boldsymbol{k = 0 \vee k = -\frac{1}{4}}$

Soluzioni entrambe accettabili perché
$-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$